1. **Tema**: Determinación de la posición de las galgas extensiométricas en una barra de torsión.

2. **Objetivos**:

   a. Simular el comportamiento estático de una barra de torsión, mediante el uso de un paquete CAD/CAM/CAE.

3. **Teoría**.

Deformación de un miembro circular sometido a torsión.

Considerar la rotación relativa de dos secciones circulares maciza adyacentes de radio c de un elemento de longitud L, tal como lo muestra la Fig. 1.

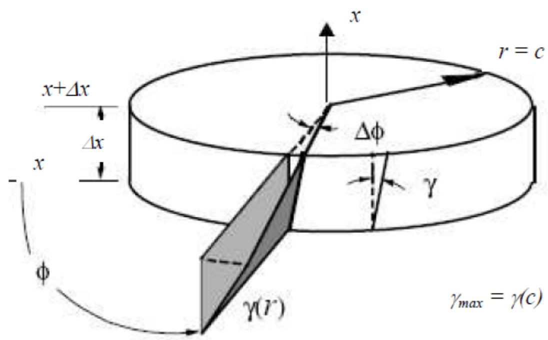

Fig. 1. Rotación relativa de dos secciones circulares adyacentes debido a torsión

De la geometría de la Fig. 1 se obtiene la siguiente relación

$$\gamma = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{r\Delta\phi}{\Delta x}\right) = r\frac{d\phi}{dx} \qquad (1)$$

La expresión anterior, debido a la hipótesis de la geometría de deformación, es válida para cualquier valor de r tal que r <= c. Además, de la geometría de deformación presentada en la Fig. 1, se tiene que un plano paralelo al eje longitudinal x rota en forma relativa en un ángulo γ debido al ángulo Δϕ. Por lo tanto, si el plano tenía forma de rectángulo, luego de la rotación relativa Δϕ de la sección transversal tiene forma de rombo.

Si la expresión de la Ec. (1) se discretiza, para pequeños valores de la deformación γ se cumple

$$\gamma = r\frac{\Delta\phi}{\Delta x} \qquad (2)$$

Donde Δϕ y γ están expresados en radianes.

De la Ec. (2) se puede concluir lo siguiente:

- La deformación de corte γ es proporcional al ángulo Δϕ.

- La deformación de corte γ es proporcional a la distancia r medida desde el eje del elemento circular hasta el punto en consideración.
- La deformación de corte γ varía linealmente con la distancia medida desde el eje del elemento circular.
- La deformación de corte γ máxima se da en la superficie del elemento (r = c).

$$\gamma_{\max} = c\frac{\Delta\phi}{\Delta x} \tag{3a}$$

$$\gamma = \frac{r}{c}\gamma_{\max} \tag{3b}$$

Tensiones debido a la Torsión en el Rango Elástico.
Considerar la ley de Hooke para la tensión de corte τ.

$$\tau = G\gamma \tag{4}$$

donde G es el módulo de rigidez o módulo de corte del material. Utilizando las Ecs. (3) y (4), se obtiene

$$\tau = \frac{r}{c}\tau_{\max} \tag{5}$$

lo que indica que la tensión de corte τ varía linealmente con la distancia r medida desde el eje longitudinal del elemento circular. Para el caso de una sección anular, se cumple la siguiente relación (Fig. 2)

$$\tau_{\min} = \frac{c_1}{c_2}\tau_{\max} \tag{6}$$

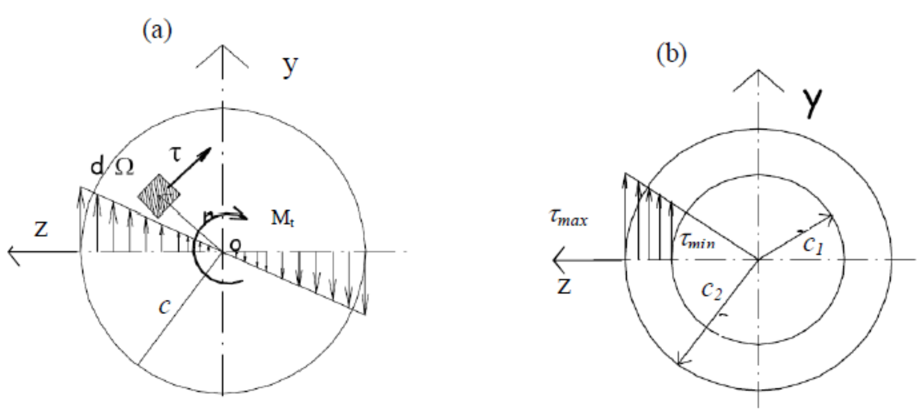

Fig. 2. (a) Distribución de tensiones tangenciales debido a la torsión en una sección maciza y (b) en una sección anular

Momento de Torsión Interno: M_t

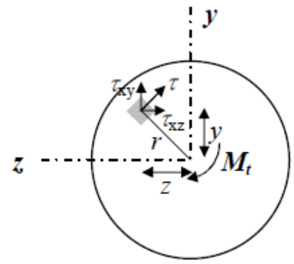

Fig. 3. Equilibrio en la sección transversal debido a un momento de torsión

Considerar las tensiones que actúan en la sección transversal mostrada en la Fig. 3. Por equilibrio, se deben cumplir las siguientes relaciones

$$\int_A \tau_{xz} dA = 0 \tag{7a}$$

$$\int_A \tau_{xy} dA = 0 \tag{7b}$$

$$M_t = \int_A \left(\tau_{xz} y + \tau_{xy} z\right) dA \tag{7c}$$

$$M_t = \int_A r\tau dA \tag{7d}$$

$$M_t = \int_A r\left(\frac{r}{c}\tau_{\max} dA\right) = \frac{\tau_{\max}}{c}\int_A r^2 dA \tag{7e}$$

$$M_t = \frac{\tau_{\max}}{c} J \tag{7f}$$

donde J es el momento polar de inercia con respecto a O (Fig. 2a). Utilizando Ecs. (5) y (7f), se obtiene

Las Ecs. (7) y (8) se conocen como las fórmulas de la torsión elástica. Suponer que la sección circular transversal está compuesta por dos materiales diferentes. Se asume que en la interacción de ambos materiales existe una compatibilidad de deformación por corte γ.

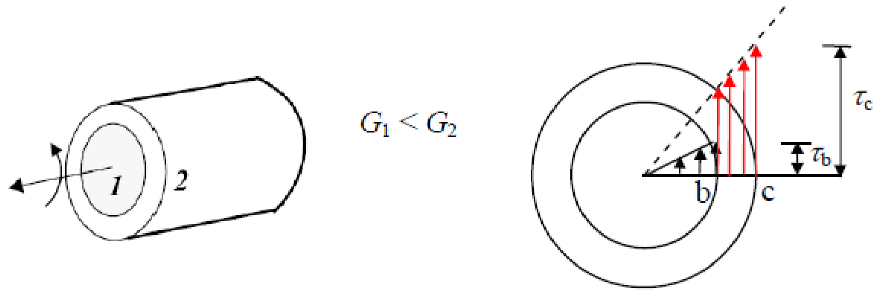

Fig. 4. Comportamiento elástico de un miembro circular en torsión con núcleo interior de material "blando"

Para el estudio de la torsión en miembro de sección transversal circular, tres conceptos básicos de la mecánica de sólidos fueron aplicados, que pueden resumirse de la siguiente manera:

- Las ecuaciones de equilibrio se usan para determinar los pares de torsión resistentes internos en una sección.
- La geometría de deformación se postula de manera que las deformaciones varían linealmente desde el eje del miembro.
- Las leyes constitutivas del material se usan para relacionar las deformaciones unitarias cortantes con las tensiones de corte.

Considerar un elemento circular sometido a un momento de torsión Mt = M, tal como muestra la Fig. 5. Si se aísla un elemento infinitesimal del sólido sometido a torsión (Fig. 5a), existe una tensión tangencial τ x (actúa en el plano definido por x) que genera el momento de torsión resultante en la sección. Como se ha visto anteriormente, existe una tensión tangencial numéricamente igual a τ x que actúa en un plano perpendicular (plano definido por y). Por equilibrio de fuerzas, existen tensiones tangenciales que actúan en los planos definidos por –x y –y del elemento infinitesimal (Fig. 5a). El estado de tensiones estudiado es de corte puro. Sin embargo, las tensiones principales actúan en planos orientados a 45º con respecto al eje del elemento circular (Fig. 5b).

Estas tensiones son iguales en valor absoluto pero de signo contrario entre sí, e iguales en valor absoluto a las tensiones tangenciales (estado de corte puro).

Observaciones:

- Cuando el análisis se limita al estudio de elementos diferenciales orientados de tal forma que sus superficies son paralelas o perpendiculares al eje longitudinal del elemento, en estas superficies se desarrolla un estado de tensiones de corte puro.
- Si el elemento diferencial se rota en 45º, se encuentra un estado de tensiones que corresponden a tensiones de tracción y compresión en las superficies del elemento diferencial rotado.

- Los materiales dúctiles generalmente fallan a corte. Fallan en un plano perpendicular al eje longitudinal del elemento por efecto de la torsión.
- Los materiales frágiles presentan una menor capacidad a tracción que la corte. Por lo tanto, fallan en planos perpendiculares a la dirección de máxima tensión de tracción.

Angulo de Torsión en Miembros Circulares
El ángulo de torsión en elementos sometidos a torsión tiene interés en su determinación para estudiar efectos tales como:

- Control de deformaciones
- Análisis de vibraciones torsionales
- Estudio de problemas indeterminados de torsión.

Considerar el elemento diferencial de la Fig. 6 que pertenece a un elemento circular macizo sometido a una torsión Mt

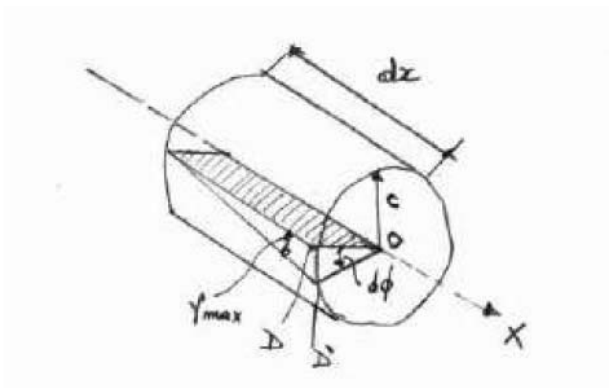

Fig. 6. Elemento diferencial de un miembro circular sometido a torsión

Asumiendo que el material tiene un comportamiento elástico lineal y que las deformaciones son pequeñas, se obtiene las siguientes relaciones geométricas

Utilizando las Ecs. (4) y (8), se obtiene la relación siguiente

$$\overline{DD'} = \gamma_{\max} dx = c d\phi$$

$$\frac{\gamma_{\max}}{c} = \frac{d\phi}{dx}$$

Utilizando las Ecs. (4) y (8), se obtiene la relación siguiente

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{M_t}{GJ} \qquad (9)$$

La expresión anterior permite determinar el ángulo relativo de torsión de dos secciones adyacentes separadas por una distancia infinitesimal dx. Por lo tanto,

$$\phi_B - \phi_A = \int_A^B d\phi = \int_A^B \frac{M_t}{GJ} dx \tag{10}$$

donde ϕB y ϕA son las rotaciones angulares de las secciones B y A respectivamente. En general puede ser que torsión Mt, G y J sean función de la variable x.

4. **Trabajo preparatorio**.

   Modele en Solidworks y CosmosWorks una barra de torsión de 30 cm de largo y 2 cm de radio empotrada o sujeta firmemente por uno de sus extremos mientras que por el otro se aplica un torque. Determine los accesorios que sean necesarios y dibújelos, para que se pueda transferir el torque aplicado a la barra. La barra es de aluminio solido.

5. **Equipo necesario.**
   a. Computador,
   b. SolidWorks con CosmosWorks.
   c. Barra de torsión dibujada.

6. **Procedimiento.**
   a. Cargue los archivos de los dibujos a SolidWorks.
   b. Aplique la carga sobre la barra, si es necesario dibujar algún accesorio para aplicar la misma, dibújelo.
   c. Genere y guarde el informe generado por el software.
   d. Anote en las hojas de resultados la posición de las galgas en la barra.
   e. Varié el área transversal de la barra de circular a polinómica (8 lados). Repita los pasos anteriores

7. **Informe de laboratorio**.
   Presente el informe con los elementos que en este documento deben estar, añada como anexo al informe las hojas de datos escaneadas y correctamente revisadas, y compruebe teóricamente los resultados obtenidos en la hoja de datos, hallando las ecuaciones de las respuestas.
   Para el informe:
   ¿Qué sucede con la barra de torsión si pasa de cilíndrica a prismática. Comente en función de los resultados obtenidos?
   Valide los resultados de la simulación calculando valores y posiciones para la ubicación de galgas.

HOJA DE RESULTADOS

GUIA A1	GRUPO No:	
Integrantes:		

Barra de torsión: Posiciones para las galgas		
X:	Y:	Z:
X:	Y:	Z:
X:	Y:	Z:
X:	Y:	Z:
X:	Y:	Z:

Revisado: ______________________________